

# Curso de Física Estatística

## 3ª Lista - 2º semestre 2015

Capítulos 2 do Salinas ou Reif e cap 4 Salinas ou Reif 3.3

- Salinas 2.1 - Os núcleos dos átomos de certos sólidos cristalinos têm spin  $s = 1$ . De acordo com a teoria quântica, cada núcleo pode ter três estados quânticos de spin (com  $m = +1, 0$  ou  $-1$ ). Esse número quântico mede a projeção do spin nuclear ao longo do eixo cristalino do sólido. Como a distribuição de carga nuclear não é esfericamente simétrica, a energia do núcleo depende da orientação do seu spin em relação ao campo elétrico local. Assim, um núcleo nos estados  $m = \pm 1$  tem energia  $D > 0$  e um núcleo no estado  $m = 0$  tem energia nula. O hamiltoniano de spin desse sistema de  $N$  núcleos localizados pode ser escrito na forma

$$H = D \sum_{j=1}^N S_j^2$$

onde a variável de spin  $S_j$  pode assumir os valores  $+1, -1$  ou  $0$ . Obtenha o número de estados microscópicos acessíveis ao sistema com energia total  $U$ .

- Salinas 2.3 (Reif 2.2) Considere um sistema unidimensional clássico constituído por duas partículas não interagentes de mesma massa  $m$ . O movimento dessas partículas está restrito a uma região do eixo entre  $x = 0$  e  $x = L > 0$ . Sejam  $x_1$  e  $x_2$  as coordenadas de posição das partículas e  $p_1$  e  $p_2$  os momentos canonicamente conjugados. A energia total desse sistema está entre  $E$  e  $E + \delta E$ . Desenhe a projeção do espaço de fase no plano definido pelas coordenadas de posição. Indique a região desse plano que é acessível ao sistema. Repita agora seus desenhos no plano definido pelas coordenadas de momento.
- Salinas 2.6 Desprezando toda a complexidade do espaço de fase clássico, considere um sistema de  $N$  partículas distinguíveis, muito fracamente interagentes, que podem ser encontradas em dois estados, com energia nula ou com energia  $\epsilon > 0$ , respectivamente. Dada a energia

total  $U$  desse sistema, obtenha uma expressão para o número de estados microscópicos correspondentes  $\Omega(U, N)$ . Obtenha então a entropia por partícula,  $s = s(u)$ , onde  $u = U/N$  (use o limite termodinâmico). Obtenha a energia por partícula  $u$  em função da temperatura  $T$ . Obtenha uma expressão para o calor específico  $c$  em função da temperatura  $T$ . Esboce um gráfico de  $c$  contra  $T$ , verificando o máximo arredondado característico do efeito Schottky.

- (Salinas 2.4) (+) A posição de um oscilador harmônico clássico unidimensional é dada por  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$  onde  $A$ ,  $\omega$  e  $\phi$  são constantes positivas.

a) Calcule  $p(x)dx$ , a probabilidade de encontrar a posição do oscilador entre  $x$  e  $x + dx$ . Note que em uma oscilação, de período  $T$ , o oscilador passa um tempo  $dt$  no intervalo de  $x$  considerado, então

$$p(x)dx = \frac{dt}{T}$$

Faça um gráfico de  $p(x)$  como função de  $x$ .

b) Raciocine agora em termos do espaço de fase clássico e de um ensemble de osciladores harmônicos unidimensionais, cujas energias estão no pequeno intervalo entre  $E$  e  $E + dE$ . (a região acessível no espaço de fase corresponde a uma coroa elíptica) Mostre que a probabilidade  $p(x)dx$  também pode ser obtida por meio da razão entre a área da parte da coroa elíptica definida pelo intervalo entre  $x$  e  $x + dx$  e a área total da coroa elíptica. Expresse  $p(x)$  em termos de  $E$  e  $x$ . Relacionando  $E$  com a amplitude  $A$ , mostre que o resultado é o mesmo que o obtido no item a. Este é um dos poucos exemplos onde podemos verificar a validade da hipótese ergódica e do postulado das probabilidades iguais a priori.

- (Salinas 2.7) No modelo de gás de rede se divide o volume acessível às moléculas em  $V$  células de volume  $v_0$ . Cada célula pode estar vazia ou ocupada por uma única partícula. Encontre o número de maneiras de distribuir  $N$  partículas distinguíveis entre as  $V$  células ( $0 \leq N \leq V$ ). Como sua resposta seria alterada se as partículas fossem indistinguíveis?

- (Salinas 4.5) Ainda considerando o modelo de gás de rede, partículas indistinguíveis.
  - a) Obtenha a entropia por partícula  $s(v)$ , onde  $v$  é o volume médio por partícula, dado por  $v = Vv_0/N$ .
  - b) A partir da equação fundamental determinada no item anterior, obtenha a equação de estado para  $p/T$ .
  - c) Escreva a equação do item anterior em termos do número médio de partículas por unidade de volume  $\rho = 1/v$ . Faça uma expansão em torno de  $\rho = 0$  (baixa densidade), calculando seus três primeiros termos não nulos. Esta é a expansão virial e os coeficientes dessa expansão são os coeficientes viriais do gás. Mostre que truncando a expansão em primeira ordem obtemos a lei de Boyle para gases ideais.
- Salinas 4.1 Considere um modelo de  $N$  íons magnéticos localizados, definido pelo hamiltoniano de spin

$$H = D \sum_{j=1}^N S_j^2$$

onde a variável  $S_j$  pode assumir os valores  $-1, 0, +1$ , para qualquer  $j$ . Dada a energia total  $E$ , utilize a expressão do número de estados microscópicos acessíveis ao sistema,  $\Omega(E, N)$ , para obter a entropia por partícula,  $s = s(u)$ , onde  $u = E/N$ . Obtenha uma expressão para o calor específico  $c$  em função da temperatura  $T$ . Esboce um gráfico de  $c$  contra  $T$ , verificando o máximo arredondado característico do efeito Schottky. Escreva agora uma expressão para a entropia como função da temperatura. Quais os valores limites da entropia para  $T \rightarrow 0$  e para  $T \rightarrow \infty$ ?

- Considere dada a expressão para o volume acessível no espaço de fase para um gás ideal com  $N$  partículas, com energia total entre  $E$  e  $E + \delta E$ , contido em um volume  $V$ :

$$\Omega(E, V, N) = \frac{1}{2N!} C_{3N} V^N (2m)^{3N/2} E^{(3N/2-1)} \delta E$$

onde  $C_{3N} = N^{-\frac{3N}{2}} b^N$ , com  $b$  constante e  $\delta E$  constante (muito menor que  $E$ ).

Considere então um gás ideal de  $N$  partículas ( $N \gg 1$ ). Usando a definição de entropia total  $S$  e a expressão para  $\Omega$ , e identificando a energia interna  $U$  com  $E$ , obtenha  $U$  em função da temperatura.

- (Reif, secção 7.3) Considere um sistema isolado, de volume  $2V$ , composto por dois subsistemas, cada um ocupando um volume  $V$ , separados por uma partição. Cada subsistema é um gás ideal de  $N$  partículas, à mesma temperatura  $T$ , com energia  $E = 3/2Nk_B T$ .

(a) Calcule a entropia total  $S_i$  de cada gás ( $i = 1, 2$ ).

(b) Se os dois gases são o mesmo gás, a entropia  $S$  do sistema composto deve ser igual a entropia do sistema composto sem a partição (um gás ideal de  $2N$  partículas à temperatura  $T$  em um volume  $2V$ ). Calcule esta entropia.

(c) A entropia do sistema composto também deve ser dada por  $S = S_1 + S_2$  (aditividade da entropia). Calcule  $S - (S_1 + S_2)$  (sendo os gases iguais) e mostre que o resultado é  $2Nk_B \ln 2$  (não dá zero como deveria). Este é o paradoxo de Gibbs. Como se pode explicar isto ?